



XXV Gara Nazionale a Squadre

Semifinale 1 – Venerdì 3 Maggio 2024



Ministero dell'Istruzione
e del Merito

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [★].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Festa al castello

SherLog Hodge, il famoso detective, osserva di nascosto i 33 partecipanti ad una festa. Sa che alcuni sono dalla sua parte, gli altri invece sono fedeli al suo acerrimo nemico Mongearty. Alcuni partecipanti si stringono la mano, ma solo se non si conoscevano prima. Sapendo che gli appartenenti ad una stessa fazione già si conoscevano, al massimo quante strette di mano ha potuto osservare SherLog?

2. Tentativo di cattura

SherLog Hodge ed il fido Wolfram costruiscono una trappola per incastrare Mongearty. Si tratta di un rettangolo $ABCD$ con AB lungo $48 dm$ e BC lungo $20 dm$. Sulla diagonale AC viene costruito un rettangolo in modo tale che AC sia un lato ed il lato ad esso opposto passi per B . Allo stesso modo su BD si costruisce un rettangolo passante per A . Se Mongearty entrerà nell'area costituita dall'unione dei tre rettangoli, la trappola scatterà. Wolfram si chiede se l'area sia sufficiente. Quanto vale l'area, in dm^2 ?

3. Quesito nel romanzo

La nota scrittrice di libri gialli Jessica Fourier ama piazzare qualche quesito matematico nei suoi romanzi. Nella sua ultima fatica chiede al lettore quante siano le coppie (x, y) di interi con $|y| \leq 4000$ per cui esiste un intero positivo k che soddisfa la relazione $x^2 + y^2 + 2^{2k-1} + 2^k x - 2^k y = 0$. Qual è la risposta?

4. La strada verso il rifugio

L'ispettore Gauget si trova alla base di una montagna conica di apotema lungo $600 m$ e raggio di base $150 m$. Deve catturare un fuggitivo, nascosto nel rifugio che si trova sul lato della montagna a esattamente $150 m$ da lui verso la vetta della montagna. Per arrivare al rifugio, l'ispettore percorre la strada più corta che faccia anche un giro completo intorno alla montagna; osserva che curiosamente, la strada percorsa è per un primo tratto in salita e poi in discesa. Quanti metri è lungo il tratto in salita?

5. Pizzini per MontyHallbano

Il boss dei Sin(agra) impartisce ordini in codice utilizzando sequenze di esattamente tre lettere, tutte distinte, prese da un alfabeto che ha in tutto n lettere. Il commissario MontyHallbano non sa tradurre gli ordini scritti sui pizzini, ma sa che il numero totale di possibili sequenze è multiplo di 11 e di 19. Quanto vale n , come minimo?

6. La generosità di Zenonigata

Zenonigata è talmente ossessionato da Lupin/3 che ha promesso che, quando lo catturerà, regalerà ai colleghi tanti MathYen quanto vale la somma delle cifre della somma delle cifre della somma delle cifre di 2023^{2024} . Quanti MathYen sono?

7. La sfida di Jessica Fourier

Jessica Fourier ha il classico blocco dello scrittore matematico. Per distrarsi sfida il Dr. Sette: entrambi hanno un foglio con disegnata un'identica circonferenza e devono ritagliare un quadrilatero. Entrambi i quadrilateri devono avere la stessa area. Il Dr. Sette ritaglia il quadrato inscritto nella circonferenza. Jessica invece traccia una corda AB a distanza $400 mm$ dal centro C e le tangenti nei punti A e B alla circonferenza che si intersecano in P . Quindi ritaglia il quadrilatero $CAPB$. Quanto misura il raggio delle due circonferenze identiche in mm ?

8. Vicini di tavola

Attorno ad una tavola rotonda siedono 10000 persone, ma purtroppo ognuna di esse potrebbe essere un membro della famigerata Organizzazione Nera. Di queste persone, 4248 pronunciano la seguente frase: "Tra me e le due

persone al mio fianco si nascondono almeno due membri dell'Organizzazione"; tutte le altre invece dichiarano: "Tra me e le due persone al mio fianco si nasconde al più un membro dell'Organizzazione". Il detective Kolmogoro, dietro "suggerimento" di coNaN, conclude: "Assumendo che i membri dell'Organizzazione mentano sempre e che tutti gli altri dicano sempre la verità, è possibile che il numero di membri dell'Organizzazione sia...".

Con quanti numeri diversi Kolmogoro avrebbe potuto terminare la frase?

9. Il disegno di Fuzzy [★]

L'ispettore Giuseppe Fuzzy, collaboratore di MontyHallbano, disegna un triangolo ABC isoscele in A . Prende poi i punti D ed E rispettivamente sui lati AC e AB tali che DE è parallelo a BC . Detta P l'intersezione fra i segmenti BD e CE , osserva che $\widehat{BPC} = 60^\circ$. Sa, inoltre, che le circonferenze inscritte nel quadrilatero $ADPE$ e nel triangolo BPC hanno raggi congruenti, e che l'altezza del triangolo ABC relativa al vertice A misura 1200. Chiede quindi al commissario MontyHallbano: quanto misura il lato AC ?

10. Il quesito del tenente

Il tenente Coulomb ha già capito chi è il colpevole, per cui gioca di psicologia per farlo confessare. La domanda che Coulomb pone, e che fa crollare il sospettato, è la seguente: in quanti dei sottoinsiemi non vuoti di $\{1, 2, \dots, 12\}$ il prodotto degli elementi ha zero come cifra delle unità?

11. Gioco perverso [★]

Mongearthy ha catturato il povero Wolfram e lo ha piazzato nel centro di un poligono regolare di 2024 vertici. Per deridere SherLog Hodge, Mongearthy fa un gioco perverso: sceglie a caso un sottoinsieme C di 100 vertici tali che non ve ne siano due opposti rispetto al centro del poligono. Poi costruisce tutti i possibili triangoli con vertici in C : se Wolfram è esterno a tutti questi triangoli avrà salva la vita. SherLog ha già calcolato quale sia la frazione f , ridotta ai minimi termini, corrispondente alla probabilità che Wolfram sopravviva. Quanto vale il numeratore di f ?

12. Foglietto con indizio

Sulla scena del crimine, Hermite Poincot trova un foglietto recante una sequenza di numeri: il primo termine è 1 mentre l' n -esimo termine è la somma del k -esimo termine (dove k è la parte intera della radice di n) e del valore assoluto della differenza tra n e il quadrato perfetto ad esso più vicino. Hercule nota che la differenza tra gli ultimi due numeri è 10: quanto è lunga al minimo la sequenza? *Fornire l'esponente di 2 nella fattorizzazione in fattori primi.*

13. Scansionando numeri

Un numero n ha una scrittura consecutiva se esiste una sequenza di almeno due interi positivi consecutivi tali che la loro somma sia n . Tra i vari gadget dell'ispettore Gauget vi è il *consecutivometro*: dato un numero n , il *consecutivometro* restituisce il numero di scritture consecutive di n . Per risolvere l'ultimo caso l'ispettore usa il *consecutivometro* su tutti i numeri da 1 a 101 e somma tutti i valori ottenuti. Quanto vale questa somma?

14. Chiamate gli artificieri!

MontyHallbano ha avuto una soffiata: una cella terroristica ha nascosto una bomba in una rotonda circolare. Il Commissario è già riuscito a localizzare la rotonda, perché sa che sui bordi ci sono 3 angeli: A e B agli estremi di un diametro e l'altro angelo X forma un angolo $\widehat{XAB} = 30^\circ$. Inoltre, con gli indizi raccolti, Fuzzy sta disegnando la mappa: traccia un altro diametro $XY = 18m$ e chiama C, D rispettivamente le intersezioni tra le rette AX e AY con la tangente alla rotonda condotta da B . M e N sono i punti medi di BX e BY . La bomba è stata piazzata nell'intersezione delle rette CM e DN . Gli artificieri hanno bisogno di conoscere la distanza precisa di A dalla bomba. Quanto vale questa distanza in cm ?

15. Palline magiche

Il sospettato che Hermite Poincot sorveglia ha inscenato un gioco di magia per confondere il detective. Inizialmente ha in mano 2 palline rosse; ad ogni passaggio compie una tra le seguenti mosse:

- aggiunge una pallina blu ed una pallina rossa;
- aggiunge una pallina blu e toglie una pallina rossa;
- aggiunge due palline verdi.

Dichiara che quando avrà in mano 11 palline blu, 9 rosse e 4 verdi sparirà, inoltre vuole raggiungere l'obiettivo usando il numero minimo possibile di mosse. In quanti modi può farlo?

16. Neanche stavolta

L'ispettore Zenonigata ha messo Lupin/3 all'angolo proponendogli la successione a_n , che rispetta la seguente legge: per ogni $n > 1$ si ha che $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3a_{n-3} + \dots + (n-1)a_1$ e inoltre $a_1 = k$ per qualche k intero. Zenonigata chiede beffardo se Lupin/3 sappia calcolare la somma di tutti i valori di k per i quali esiste n tale che $a_n = 2024$. Il ladro, altrettanto beffardo, risponde correttamente e scappa, lasciando Zenonigata a mangiarsi le mani per l'occasione sprecata. Cosa ha risposto Lupin/3?



XXV Gara Nazionale a Squadre

Semifinale 1 – Venerdì 3 Maggio 2024



*Ministero dell'Istruzione
e del Merito*

Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	Festa al castello	0272
2	Tentativo di cattura	1680
3	Quesito nel romanzo	0012
4	La strada verso il rifugio	0480
5	Pizzini per MontyHallbano	0057
6	La generosità di Zenonigata	0004
7	La sfida di Jessica Fourier	0894
8	Vicini di tavola	5751
9	Il disegno di Fuzzy [★]	1212
10	Il quesito del tenente	3040
11	Gioco perverso [★]	0025
12	Foglietto con indizio	1536
13	Scansionando numeri	0176
14	Chiamate gli artificieri!	1385
15	Palline magiche	4290
16	Neanche stavolta	2277