



Ministero dell'Istruzione

XXIII Gara Nazionale a Squadre

Semifinale 1 – Venerdì 6 Maggio 2022



Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [★].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Mai sottovalutare i gatti

Goose sembrava un'innocua gatta rossa ed invece si è rivelata essere della letale specie aliena dei Flessken! Goose ha ingoiato, oltre al Tesseract, anche un ragguardevole numero di nemici Kree. Nick Fouryer li ha contati: sono tanti quanti la somma di tutti i numeri abc di esattamente tre cifre, non necessariamente distinte, che si scrivono come prodotto di esattamente due primi e tali che $a + 4b + 7c = 24$. Quanti Kree ha mangiato Goose?

2. Il peso del martello [★]

L'agente del C.A.U.C.H.Y.L.D. Phil Coulson ha trovato il martello di CanThor nel deserto. Vorrebbe portarlo al quartier generale, ma nessuno riesce a spostarlo. L'agente Coulson sa che il peso, in kg, del martello è uguale al numero di coppie di interi positivi (a, b) tali che $4 \cdot MCD(a, b) < a + b < 2022$. Quanto pesa il martello?

3. Quanti ne rimarranno? [★]

CanThor, Log χ e Ammodino stanno combattendo i Gb-anti di ghiaccio sulla terra. Alla battaglia partecipano 6 asgardneriani, 17 umani e n Gb-anti di ghiaccio: ci sono dei rapporti di potenza tra queste razze e in particolare

- Un asgardneriano può uccidere un umano o un Gb-ante;
- Un Gb-ante può uccidere un umano;
- Un umano non può uccidere nessuno.

A causa di una maledizione che si è abbattuta sul campo di battaglia:

- Quando un asgardneriano uccide un Gb-ante, si trasforma in umano;
- Quando un asgardneriano uccide un umano, si trasforma in Gb-ante;
- Quando un Gb-ante uccide un umano, si trasforma in asgardneriano.

Sapendo che a un certo punto non c'è più possibilità che qualcuno uccida qualcun altro, sia $f(n)$ il massimo numero di personaggi rimasti sul campo. Calcolare $f(1) + f(2) + \dots + f(99) + f(100)$.

4. La creazione del Super Matematico

Il giorno è arrivato: a Steve verrà iniettato il siero del Super Matematico. L'agente Peggy Cartesio controlla che sia tutto a posto nella stanza, che ha la forma di un quadrilatero $ABCD$, dove si svolgerà l'esperimento. L'agente sa che l'angolo in A è ampio 120 gradi, mentre quello in D è ampio 45 gradi. Sa inoltre che i lati AB e BC sono congruenti ed hanno lunghezza intera, inoltre la bisettrice dell'angolo in A passa per C . L'agente Cartesio non ricorda l'area della stanza; sa solo che è maggiore di $1000m^2$. Quanto vale al minimo l'area (in m^2)?

5. Lo scudo di Capitan Numerica

Lo scudo di Capitan Numerica è stato costruito da Harold Stark. Ha una forma circolare e per tenerlo sono fissate due cinghie in 4 punti della circonferenza esterna A, B, C, D , in quest'ordine. Le due cinghie sono vanno rispettivamente da A a C e da B a D , intersecandosi in T . Sapendo che $AB = 40cm, BC = 70cm, CD = 80cm, AD = 98cm$, determinare il rapporto tra DT e TB . Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

6. L'invasione dei $\chi\tau\text{ri}$ [★]

Il malvagio Log χ è riuscito ad aprire il varco spaziotemporale per permettere ai $\chi\tau\text{ri}$ di invadere la terra: essi sono divisi in 390 battaglioni. Si sa che l' n -esimo battaglione, per ogni n , è composto da un numero di $\chi\tau\text{ri}$ pari a $\tau(n)$, il numero dei divisori interi positivi di n . Quanti $\chi\tau\text{ri}$ è riuscito a invocare Log χ ?

7. L'hobby di Drax

Drax il Distruttore di Congetture, si sa, sotto sotto è un tenerone che ama gli origami. Questa volta parte da un foglio quadrato $ABCD$ di lato 420mm . La prima cosa che deve fare è effettuare una singola piega che porti il vertice D sul punto P del lato AB tale che $AP = 210\text{mm}$. In questo modo il lato DC va ad intersecare il lato BC nel punto Q : quanto vale, in mm , la lunghezza di BQ ?

8. *sup*-ereroi ordinati

In fuga da Ultron, gli Avengers si nascondono nella fattoria di Occhio di Calcolo. Per non perdere i propri *sup*-erpoteri matematici, fanno questo gioco. Dato che sono 10 ed ognuno ha un'altezza diversa da tutti gli altri, si dispongono in fila uno a fianco all'altro in modo che ognuno abbia alla sua sinistra solo persone più basse di lui, oppure solo persone più alte di lui. In quanti modi è possibile farlo?

9. Una tabella di particelle πm

In una tabella quadrata composta da 81×81 caselle sono poste delle particelle πm , e in ognuna della caselle c'è un numero diverso di particelle e ce ne sono di tutte le numerosità da 1 a 81^2 nel seguente modo: partendo da un angolo della tabella si trovano in ordine crescente 1 particella, 2 particelle, 3 particelle, prima nelle caselle al bordo andando sempre più all'interno così da creare una spirale a chiocciola di particelle πm con le caselle meno numerose all'esterno e quelle più numerose all'interno. Nella casella al centro della tabella si troveranno dunque 81^2 particelle πm . Arctan-man deve ora scegliere 81 caselle in modo che non ce ne siano due nella stessa riga o nella stessa colonna. Successivamente il Prof. πm seleziona, tra le 81 caselle scelte da Arctan-man, quella che contiene il maggior numero di particelle πm e le mette via. Dopo questa doppia procedura di selezione, quante sono al minimo le particelle messe via dal Prof. πm ?

10. Silenzio colpevole

Eigen Man ha appena scoperto che fu Winter Solider ad uccidere i suoi genitori. Arrabbiato con Captain Numerica per non averglielo detto, lo mette alle strette con la seguente domanda: quanto vale il numeratore della frazione

$$\sum_{n=2}^{100} \frac{3n+1}{n^3-n}$$

ridotta ai minimi termini?

11. Il quartier generale [★]

Sam Weilson, alias Falcon, può volare grazie a delle ali artificiali e dall'alto guarda il quartier generale degli Avengers. La pianta dell'edificio è un triangolo ABC di lati $AB = 7$ Cap-metri, $BC = 25$ Cap-metri e $CA = 24$ Cap-metri. Vista dall'alto, l'area di atterraggio di elicotteri e *sup*-ereroi è la circonferenza ω inscritta ad ABC , tangente a BC in D . C'è poi un laghetto di forma circolare, che dall'alto è la circonferenza Ω ex-inscritta opposta al vertice A , che tange il lato BC in E . Detti X l'intersezione più vicina ad A della retta AE con ω e Y l'intersezione più lontana da A della retta AD con Ω , Weilson si chiede quanto valga l'area del quadrilatero $XEYD$ (in Cap-metri quadri).

12. L'Occhio di Campigotto

Dottor Stringa è stato scelto dall'Antico per poter diventare il nuovo guardiano dell'Occhio di Campigotto, che contiene la gemma del Tempo. L'Occhio di Campigotto è un amuleto circolare con un diametro tracciato; sulla circonferenza sono poste 4 pietre preziose, 2 agli estremi del diametro tracciato e altre due, sempre diametralmente opposte, a formare un quadrato con le altre. Affinché l'Occhio di Campigotto possa avere la potenza di contenere la gemma del Tempo, se due pietre preziose sono collegate direttamente (o da un quarto di circonferenza o dal diametro), esse devono essere differenti. Per poter padroneggiare l'Occhio di Campigotto, il Dottor Stringa deve sapere esattamente quanti sono i possibili modi di decorarlo, avendo a disposizione 9 tipi di pietre preziose diverse. *Due decorazioni sono considerate equivalenti se gli amuleti corrispondenti sono uguali a meno di una rotazione del piano che contiene l'amuleto stesso.*

13. La sfida tra i gladiolimpionici

CanThor è finito sul pianeta di Schwarzaar, dove, per ritornare sulla terra, deve sfidare come gladiolimpionico il campione di Schwarzaar, che si rivela essere il suo collega di lavoro Convex Hulk. Il Gran Maestro pone allora loro il seguente problema: «Cari gladiolimpionici, una successione di polinomi è definita per ricorrenza da $p_0(x) = 1$ e $p_{n+1}(x) = (x-7)p_n(x) + p_n(2022)$ per ogni intero non negativo n . Chi determinerà il più grande intero k per cui 4^k divide $p_{2022}(7)$ avrà salva la vita!». CanThor riesce a risolvere correttamente il problema per primo: qual è la sua risposta?

14. Nuovi superpoteri

Petersen Parker è stato morso da un ragno ed ha acquisito alcuni super poteri, tra cui quello di muoversi su qualsiasi superficie. Testa la sua nuova abilità arrampicandosi su un edificio di forma cilindrica, avente sulla superficie laterale 2 scanalature parallele alle facce circolari e 3 scanalature verticali parallele all'asse del cilindro. Petersen parte sul piede di una di queste scanalature verticali e, muovendosi solo lungo i solchi o lungo le circonferenze delle

basi, vuole arrivare sulla stessa scanalatura di partenza ma sulla faccia superiore. Può muoversi solo verso l'alto o in senso antiorario. In quanti modi può raggiungere il proprio obiettivo senza mai percorrere due volte lo stesso tratto (ma potendo passare più di una volta in uno stesso punto, anche quello finale)?

15. Per il destino della tribù

Il nuovo re di QuodEratWakandum, T'Chebyshev, ha parlato con Okoye, che gli ha proposto un quesito da cui dipende la pace fra le tribù. Scelto un intero m , bisogna applicare ripetutamente la seguente procedura: si calcolano, in ordine, $\frac{2027}{2029}m$, $\frac{2029}{2027}m$, $\frac{1}{6}m$, $\frac{2029}{2}m$, $\frac{2027}{3}m$; non appena una di queste operazioni restituisce un intero, si sostituisce m con il primo intero trovato e si riapplica la procedura. Se nessuno dei valori precedentemente calcolati è un intero, ci si ferma e le tribù si riappacificano. Quanti sono gli interi $1 \leq m \leq 2022$ che garantiscano la riappacificazione?

16. Eigen Man e J.A.R.V.I.S. [★]

Eigen Man verifica le abilità matematiche di J.A.R.V.I.S., l'intelligenza artificiale da lui creata. Scrive al touch screen il polinomio $x^{2022} + 3x^{2021} + 3^2x^{2020} + \dots + 3^{2020}x^2 + 3^{2021}x + 3^{2022}$; J.A.R.V.I.S., in ogni momento, può:

- riscrivere il polinomio scritto al touch screen in un qualunque modo come prodotto di polinomi a coefficienti reali e di grado maggiore o uguale a 1; oppure
- cancellare un fattore di secondo grado $ax^2 + bx + c$ e sostituirlo con $(b - c)x + c$.

Dopo che J.A.R.V.I.S. ha effettuato un certo numero di mosse, Eigen Man legge al touch screen un polinomio $p(x)$ di primo grado, e si chiede quale sia la soluzione di $p(x) = 0$. *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*



Ministero dell'Istruzione

XXIII Gara Nazionale a Squadre

Semifinale 1 – Soluzioni – Venerdì 6
Maggio 2022



Nr.	Problema	Soluzione
1	Mai sottovalutare i gatti	1365
2	Il peso del martello [★]	7844
3	Quanti ne rimarranno? [★]	2222
4	La creazione del Super Matematico	1049
5	Lo scudo di Capitan Numerica	0019
6	L'invasione dei χτρι [★]	2393
7	L'hobby di Drax	0280
8	<i>sup</i> -eroi ordinati	0512
9	Una tabella di particelle πm	4881
10	Silenzio colpevole	6237
11	Il quartier generale [★]	0527
12	L'Occhio di Campigotto	1764
13	La sfida tra i gladiolimpionici	5052
14	Nuovi superpoteri	0086
15	Per il destino della tribù	0810
16	Eigen Man e J.A.R.V.I.S. [★]	6065



Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [★].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Mai sottovalutare i gatti

Goose sembrava un'innocua gatta rossa ed invece si è rivelata essere della letale specie aliena dei Flessken! Goose ha ingoiato, oltre al Tesseract, anche un ragguardevole numero di nemici Kree. Nick Fouryer li ha contati: sono tanti quanti la somma di tutti i numeri abc di esattamente tre cifre, non necessariamente distinte, che si scrivono come prodotto di esattamente due primi e tali che $a + 4b + 7c = 27$. Quanti Kree ha mangiato Goose?

2. Il peso del martello [★]

L'agente del C.A.U.C.H.Y.L.D. Phil Coulson ha trovato il martello di CanThor nel deserto. Vorrebbe portarlo al quartier generale, ma nessuno riesce a spostarlo. L'agente Coulson sa che il peso, in kg, del martello è uguale al numero di coppie di interi positivi (a, b) tali che $4 \cdot MCD(a, b) < a + b \leq 2022$. Quanto pesa il martello?

3. Quanti ne rimarranno? [★]

CanThor, Log χ e Ammodino stanno combattendo i Gb-anti di ghiaccio sulla terra. Alla battaglia partecipano 6 asgardneriani, 17 umani e n Gb-anti di ghiaccio: ci sono dei rapporti di potenza tra queste razze e in particolare

- Un asgardneriano può uccidere un umano o un Gb-ante;
- Un Gb-ante può uccidere un umano;
- Un umano non può uccidere nessuno.

A causa di una maledizione che si è abbattuta sul campo di battaglia:

- Quando un asgardneriano uccide un Gb-ante, si trasforma in umano;
- Quando un asgardneriano uccide un umano, si trasforma in Gb-ante;
- Quando un Gb-ante uccide un umano, si trasforma in asgardneriano.

Sapendo che a un certo punto non c'è più possibilità che qualcuno uccida qualcun altro, sia $f(n)$ il massimo numero di personaggi rimasti sul campo. Calcolare $f(1) + f(2) + \dots + f(100) + f(101)$.

4. La creazione del Super Matematico

Il giorno è arrivato: a Steve verrà iniettato il siero del Super Matematico. L'agente Peggy Cartesio controlla che sia tutto a posto nella stanza, che ha la forma di un quadrilatero $ABCD$, dove si svolgerà l'esperimento. L'agente sa che l'angolo in A è ampio 120 gradi, mentre quello in D è ampio 45 gradi. Sa inoltre che i lati AB e BC sono congruenti ed hanno lunghezza intera, inoltre la bisettrice dell'angolo in A passa per C . L'agente Cartesio non ricorda l'area della stanza; sa solo che è maggiore di $1000m^2$. Quanto vale al minimo l'area (in m^2)?

5. Lo scudo di Capitan Numerica

Lo scudo di Capitan Numerica è stato costruito da Harold Stark. Ha una forma circolare e per tenerlo sono fissate due cinghie in 4 punti della circonferenza esterna A, B, C, D , in quest'ordine. Le due cinghie sono vanno rispettivamente da A a C e da B a D , intersecandosi in T . Sapendo che $AB = 50cm, BC = 90cm, CD = 100cm, AD = 96cm$, determinare il rapporto tra DT e TB . Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

6. L'invasione dei $\chi\tau\tau\iota$ [★]

Il malvagio Log χ è riuscito ad aprire il varco spaziotemporale per permettere ai $\chi\tau\tau\iota$ di invadere la terra: essi sono divisi in 420 battaglioni. Si sa che l' n -esimo battaglione, per ogni n , è composto da un numero di $\chi\tau\tau\iota$ pari a $\tau(n)$, il numero dei divisori interi positivi di n . Quanti $\chi\tau\tau\iota$ è riuscito a invocare Log χ ?

7. L'hobby di Drax

Drax il Distruttore di Congetture, si sa, sotto sotto è un tenerone che ama gli origami. Questa volta parte da un foglio quadrato $ABCD$ di lato 540mm . La prima cosa che deve fare è effettuare una singola piega che porti il vertice D sul punto P del lato AB tale che $AP = 270\text{mm}$. In questo modo il lato DC va ad intersecare il lato BC nel punto Q : quanto vale, in mm , la lunghezza di BQ ?

8. *sup*-ereroi ordinati

In fuga da Ultron, gli Avengers si nascondono nella fattoria di Occhio di Calcolo. Per non perdere i propri *sup*-erpoteri matematici, fanno questo gioco. Dato che sono 11 ed ognuno ha un'altezza diversa da tutti gli altri, si dispongono in fila uno a fianco all'altro in modo che ognuno abbia alla sua sinistra solo persone più basse di lui, oppure solo persone più alte di lui. In quanti modi è possibile farlo?

9. Una tabella di particelle πm

In una tabella quadrata composta da 101×101 caselle sono poste delle particelle πm , e in ognuna della caselle c'è un numero diverso di particelle e ce ne sono di tutte le numerosità da 1 a 101^2 nel seguente modo: partendo da un angolo della tabella si trovano in ordine crescente 1 particella, 2 particelle, 3 particelle, prima nelle caselle al bordo andando sempre più all'interno così da creare una spirale a chiocciola di particelle πm con le caselle meno numerose all'esterno e quelle più numerose all'interno. Nella casella al centro della tabella si troveranno dunque 101^2 particelle πm . Arctan-man deve ora scegliere 101 caselle in modo che non ce ne siano due nella stessa riga o nella stessa colonna. Successivamente il Prof. πm seleziona, tra le 101 caselle scelte da Arctan-man, quella che contiene il maggior numero di particelle πm e le mette via. Dopo questa doppia procedura di selezione, quante sono al minimo le particelle messe via dal Prof. πm ?

10. Silenzio colpevole

Eigen Man ha appena scoperto che fu Winter Solider ad uccidere i suoi genitori. Arrabbiato con Captain Numerica per non averglielo detto, lo mette alle strette con la seguente domanda: quali sono le ultime 4 cifre del numeratore della frazione

$$\sum_{n=2}^{200} \frac{3n+1}{n^3-n}$$

ridotta ai minimi termini?

11. Il quartier generale [★]

Sam Weilson, alias Falcon, può volare grazie a delle ali artificiali e dall'alto guarda il quartier generale degli Avengers. La pianta dell'edificio è un triangolo ABC di lati $AB = 8$ Cap-metri, $BC = 17$ Cap-metri e $CA = 15$ Cap-metri. Vista dall'alto, l'area di atterraggio di elicotteri e *sup*-ereroi è la circonferenza ω inscritta ad ABC , tangente a BC in D . C'è poi un laghetto di forma circolare, che dall'alto è la circonferenza Ω ex-inscritta opposta al vertice A , che tange il lato BC in E . Detti X l'intersezione più vicina ad A della retta AE con ω e Y l'intersezione più lontana da A della retta AD con Ω , Weilson si chiede quanto valga l'area del quadrilatero $XEYD$ (in Cap-metri quadri).

12. L'Occhio di Campigotto

Dottor Stringa è stato scelto dall'Antico per poter diventare il nuovo guardiano dell'Occhio di Campigotto, che contiene la gemma del Tempo. L'Occhio di Campigotto è un amuleto circolare con un diametro tracciato; sulla circonferenza sono poste 4 pietre preziose, 2 agli estremi del diametro tracciato e altre due, sempre diametralmente opposte, a formare un quadrato con le altre. Affinché l'Occhio di Campigotto possa avere la potenza di contenere la gemma del Tempo, se due pietre preziose sono collegate direttamente (o da un quarto di circonferenza o dal diametro), esse devono essere differenti. Per poter padroneggiare l'Occhio di Campigotto, il Dottor Stringa deve sapere esattamente quanti sono i possibili modi di decorarlo, avendo a disposizione 10 tipi di pietre preziose diverse. *Due decorazioni sono considerate equivalenti se gli amuleti corrispondenti sono uguali a meno di una rotazione del piano che contiene l'amuleto stesso.*

13. La sfida tra i gladiolimpionici

CanThor è finito sul pianeta di Schwarzaar, dove, per ritornare sulla terra, deve sfidare come gladiolimpionico il campione di Schwarzaar, che si rivela essere il suo collega di lavoro Convex Hulk. Il Gran Maestro pone allora loro il seguente problema: «Cari gladiolimpionici, una successione di polinomi è definita per ricorrenza da $p_0(x) = 1$ e $p_{n+1}(x) = (x-7)p_n(x) + p_n(2022)$ per ogni intero non negativo n . Chi determinerà il più grande intero k per cui 8^k divide $p_{2022}(7)$ avrà salva la vita!». CanThor riesce a risolvere correttamente il problema per primo: qual è la sua risposta?

14. Nuovi superpoteri

Petersen Parker è stato morso da un ragno ed ha acquisito alcuni super poteri, tra cui quello di muoversi su qualsiasi superficie. Testa la sua nuova abilità arrampicandosi su un edificio di forma cilindrica, avente sulla superficie laterale 2 scanalature parallele alle facce circolari e 3 scanalature verticali parallele all'asse del cilindro. Petersen parte sul piede di una di queste scanalature verticali e, muovendosi solo lungo i solchi o lungo le circonferenze delle

basi, vuole arrivare sulla stessa scanalatura di partenza ma sulla faccia superiore. Può muoversi solo verso l'alto o in senso antiorario. In quanti modi può raggiungere il proprio obiettivo senza mai percorrere due volte lo stesso tratto (ma potendo passare più di una volta in uno stesso punto, anche quello finale)?

15. Per il destino della tribù

Il nuovo re di QuodEratWakandum, T'Chebyshev, ha parlato con Okoye, che gli ha proposto un quesito da cui dipende la pace fra le tribù. Scelto un intero m , bisogna applicare ripetutamente la seguente procedura: si calcolano, in ordine, $\frac{2027}{2029}m$, $\frac{2029}{2027}m$, $\frac{1}{10}m$, $\frac{2029}{2}m$, $\frac{2027}{5}m$; non appena una di queste operazioni restituisce un intero, si sostituisce m con il primo intero trovato e si riapplica la procedura. Se nessuno dei valori precedentemente calcolati è un intero, ci si ferma e le tribù si riappacificano. Quanti sono gli interi $1 \leq m \leq 2022$ che garantiscano la riappacificazione?

16. Eigen Man e J.A.R.V.I.S. [★]

Eigen Man verifica le abilità matematiche di J.A.R.V.I.S., l'intelligenza artificiale da lui creata. Scrive al touch screen il polinomio $x^{2022} + 2x^{2021} + 2^2x^{2020} + \dots + 2^{2020}x^2 + 2^{2021}x + 2^{2022}$; J.A.R.V.I.S., in ogni momento, può:

- riscrivere il polinomio scritto al touch screen in un qualunque modo come prodotto di polinomi a coefficienti reali e di grado maggiore o uguale a 1; oppure
- cancellare un fattore di secondo grado $ax^2 + bx + c$ e sostituirlo con $(b - c)x + c$.

Dopo che J.A.R.V.I.S. ha effettuato un certo numero di mosse, Eigen Man legge al touch screen un polinomio $p(x)$ di primo grado, e si chiede quale sia la soluzione di $p(x) = 0$. *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*



Ministero dell'Istruzione

XXIII Gara Nazionale a Squadre

Semifinale 2 – Soluzioni – Venerdì 6

Maggio 2022



Nr.	Problema	Soluzione
1	Mai sottovalutare i gatti	1044
2	Il peso del martello [★]	9862
3	Quanti ne rimarranno? [★]	2245
4	La creazione del Super Matematico	1049
5	Lo scudo di Capitan Numerica	0047
6	L'invasione dei $\chi\tau\text{ri}$ [★]	2616
7	L'hobby di Drax	0360
8	<i>sup</i> -eroi ordinati	1024
9	Una tabella di particelle πm	7601
10	Silenzio colpevole	9949
11	Il quartier generale [★]	0161
12	L'Occhio di Campigotto	2880
13	La sfida tra i gladiolimpionici	3368
14	Nuovi superpoteri	0086
15	Per il destino della tribù	0899
16	Eigen Man e J.A.R.V.I.S. [★]	4043



XXIII Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – Sabato 7 Maggio

2022



Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [★].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Stuzzicadenti intrecciati

Convex Hulk, a tavola, si diverte a giocare con degli stuzzicadenti tutti uguali, sovrapponendoli in vari modi sul tavolo e contando i vari rettangoli che abbiano per vertici le intersezioni degli stuzzicadenti e i lati lungo porzioni degli stuzzicadenti stessi. Qual è il numero massimo di rettangoli che riesce a contare se ha a disposizione 2022 stuzzicadenti? Dare come risposta le ultime 4 cifre del risultato.

2. Infiltrati Kree [★]

2022 soldati Skrull sono in fila sull'attenti. Tra di loro ci sono alcuni traditori Kree che devono essere scoperti. Capitan Mordell interroga ognuno di loro ed ognuno risponde così: «Tra i miei vicini almeno uno è un Kree o esattamente uno non lo è (o entrambe, chiaramente)». Purtroppo i Kree mentono sempre, mentre gli Skrull sono sempre onesti. Detto N il numero delle possibili stringhe di K e S lunghe 2022 (dove con K e S si intende Kree e Skrull rispettivamente) che soddisfano gli esiti delle interrogazioni, si dia come risposta $N \pmod{60}$, cioè il resto di N nella divisione per 60.

3. Un cono tagliato

Il Dr. Stringa sta lanciando un incantesimo per creare uno scudo mistico attorno ai sup-ereroi. Prima di tutto traccia per terra un simbolo magico composto da un quadrato di lato 10m e dal cerchio circoscritto ad esso. Poi crea una barriera di luce che ha la forma della superficie laterale di un cono retto di altezza 20m, con base il cerchio tracciato. Infine traccia a partire dai lati del quadrato quattro muri dritti perpendicolari al terreno e infinitamente alti. Qual è l'area del "tetto" di questa barriera, composto dalla parte di cono all'interno delle quattro pareti?

4. Area relax

Square Groot ha bisogno di riposo e di crescere sano, per cui Bracket decide di interrare le radici in un terreno di forma triangolare ABC , con ortocentro H , circocentro O ed M punto medio del lato BC . Siano D , E ed F i piedi delle altezze relative ai lati BC , AC e AB rispettivamente, e sia inoltre X , compreso tra A ed H , l'intersezione tra la circonferenza circoscritta a EMF e AH . Sapendo che l'area di AHM vale 2022, quanto vale l'area di XMO ?

5. Un riscaldamento contoso

Appena giunti su Titano, il pianeta natale di tanh(os), Dr. Stringa si accinge a calcolare in quanti dei possibili futuri gli Avengers usciranno vittoriosi. Prima di un calcolo così complicato ha però bisogno di un riscaldamento e chiede ad Eigen Man un problema contoso da risolvere.

Eigen man: «Prova questo! Hai $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ un polinomio di terzo grado. Dette x_1, x_2, x_3 le sue radici, sai che $x_1, x_2, x_3, x_1x_2x_3$ sono numeri interi in modulo minori o uguali a 51 e che $x_1 + x_2 + x_3$ è un numero pari. Quanto vale, al massimo, b ?»

Dr. Stringa: «Elementare! Purtroppo i futuri in cui vinciamo sono molti di meno...»

Qual era la risposta al problema proposto da Eigen Man?

6. Il cuore triangolare di una stella morente [★★]

CanThor ha raggiunto NidaVennir e incontrato Ei3 ed è ora pronto a forgiare la sua nuova arma. Per riaccendere la fucina dovrà risvegliare il cuore di una stella morente. La fucina, la stella e la navicella formano un triangolo

rettangolo ABC , con cateti che misurano 426 e $120\sqrt{3}$ km. CanThor deve ora scegliere una distanza d in modo che sia possibile costruire un triangolo equilatero $A'B'C'$ (anche detto triangolo stellare di fusione, in gergo nanico) tale che $AA' = BB' = CC' = d$, in tale modo la stelle potrà rinascere.

CanThor: «Proviamo intanto con una distanza d di un chilometro»

Ei3: «Così perderai solo tempo, è troppo piccola!»

Qual è il minimo valore di d^2 in chilometri tale che sia possibile riaccendere la stella e forgiare Stormbreaker?

7. Energia da dimensioni parallele [★]

Quando Dr. Stringa deve creare uno scudo mistico o lanciare un incantesimo, inizia ad agitare le mani in aria per tracciare rette di pura energia. Durante la battaglia su Titano, Spline-Man osserva Stringa che traccia le sue rette, ma è molto difficile da seguire. Dr. Stringa traccia inizialmente un quadrato $ABCD$; chiamati M ed N i punti medi di AB e BC , rispettivamente, egli sceglie poi P e Q rispettivamente sui segmenti NC, BN . Dopodiché il mago supremo traccia le rette s, r passanti per A e rispettivamente parallele a MP e MQ . Poi si focalizza sui punti $R = s \cap DC$ e $T = r \cap DC$ ed infine illumina di energia i punti $S = TQ \cap AB$ e $G = RP \cap AB$. E finalmente lo scudo di energia è pronto.

Spline-Man non è riuscito a seguire tutti i passaggi, ma è sicuro che RG misuri 2017 pollici energetici e RT ne misuri 2071. Quanto vale $SG + ST$ (in pollici energetici)?

8. L'attacco degli outrider

L'esercito di $\tanh(\text{os})$ e i suoi seguaci sono giunti nel QuodEratWakandum per uno scontro con il gruppo di Avengers rimasti sulla Terra. Il terreno di battaglia è una scacchiera 8×8 e le navicelle del titano pazzo cariche di outrider cominciano a schiantarsi nella casella in basso a sinistra. Un outrider può muoversi solo in alto o a destra sulla scacchiera (e parte da dove è atterrata la sua navicella, cioè in basso a sinistra). Il Dr. Banner, che indossa la Convex Hulkbuster, si domanda quanti siano i percorsi che uno degli outrider può fare tale che termini nella metà superiore del campo di battaglia. Qual è il numero che Banner sta cercando?

9. Gemma iperpoligonale

Schuri sta cercando di estrarre la gemma della mente da Visione Prospettica senza ucciderlo. L'alloggiamento della gemma sulla fronte di Visione Prospettica ha la forma di un icosaedro regolare e Schuri sa che deve evidenziare un poligono regolare nell'alloggiamento per effettuare l'estrazione. Quanti sono i poligoni regolari i cui vertici sono anche vertici dell'icosaedro?

10. Superscudi della tribù del confine [★★]

La battaglia contro il temibile esercito di $\tanh(\text{os})$ imperversa e tra le fila degli Avengers militano anche i leggendari guerrieri di QuodEratWakandum della tribù del confine. Ogni guerriero possiede uno scudo di vibranio rettangolare che ha per lati dei numeri interi di piedi wakandiani compresi tra 1 e 20. Ogni scudo S possiede un coefficiente di resistenza $C_S = p^2 - 2A$, dove p è il suo *semiperimetro* ed A la sua area. Due guerrieri possono saldare i loro scudi lungo un lato per formare un superscudo ancora rettangolare, il cui coefficiente di resistenza è il prodotto dei coefficienti di resistenza degli scudi che lo compongono. Un superscudo diventa indistruttibile se il suo coefficiente di resistenza può essere scritto come somma di due quadrati perfetti non nulli. Quanti superscudi diversi sono indistruttibili? *Il superscudo formato con gli scudi (8,12) e (12,3) è lo stesso di (3,12) e (8,12) perché il rettangolo con la saldatura è identico nei due casi, mentre gli scudi (4,8) e (8,4) formano due superscudi diversi e vanno contati due volte.*

11. Non solo fiori e conchiglie seguono Fibonacci

Cinque anni dopo lo schiocco che ha ucciso metà delle forme di vita dell'universo, alcuni Avengers rimasti si riuniscono telematicamente. Nash-ata: «Carol ti vedremo qui il mese prossimo?» (riferendosi a Captain Mordell) Capitano Mordell: «Improbabile: le cose che accadono sulla terra stanno accadendo ovunque.

La mappa del nostro vasto universo è una griglia $n \times n$ di celle (con n intero positivo). Nella prima e seconda cella sono presenti rispettivamente nessuna e una galassia. Inoltre in ognuna delle celle successive è presente la somma delle galassie presenti nelle due celle precedenti (le celle sono ordinate da in alto a sinistra fino in basso a destra, da sinistra a destra in ogni riga)»

Bracket: «Sarebbe proprio un universo interessante se esistessero una riga e una colonna di celle che possiedono lo stesso numero di galassie!». Quanti sono i possibili $n \geq 1$ per cui la richiesta di Bracket è soddisfatta?

12. Autovalori di particelle e stringhe spaziotemporali

Eigen Man è alle prese con Friday per capire se è possibile sfruttare il regno quantico per viaggiare nel tempo.

Eigen Man: «Dammi l'autovalore di quella particella, includendo la decomposizione spettrale. Ci vorrà poco!»

Friday: «Non è così semplice! Ogni simulazione richiede di autoannullare una stringa spaziotemporale molto intricata». Nel frattempo sbuca deMorgan, la figlia di Eigen Man: «Papà, cosa vuol dire autoannullare una stringa spaziotemporale?»

Eigen Man: «Signorinella, perché ancora in piedi? Dovresti essere già a dormire! Una stringa spaziotemporale è

una stringa di numeri (a_0, \dots, a_k) con $k \geq 3$, tale che $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k = 0$ e inoltre abbia la proprietà che $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + k \cdot a_k = 2022$. Autoannullarla vuol dire annullare tutti i suoi elementi eseguendo (anche più di una volta) questa mossa: prendi 4 numeri consecutivi e, da sinistra a destra, aggiungi 4, togli 7, aggiungi 8 e togli 5.»

Friday: «Allora, piccola genio, se sai che posso autoannullarla, quante mosse ci vorranno al minimo?»

13. Ant-Man tra stati quantici spaziotemporali

Convex Hulk, sta tentando diversi modi di far viaggiare Ant-man nel tempo, ma senza grandi risultati.

Convex Hulk: «Sembra che il suo corpo stia saltando da uno stato quantico all'altro! Non riesco a controllarlo!»

Captain Numerica: «Puoi riportarlo qui?»

Convex Hulk: «Ci sto lavorando. Arctan-man è partito da questo stato quantico, che chiamiamo stato-0, e sta saltando tra questo e altri tre stati quantici, lo stato-1, lo stato-2 e lo stato-3. In ogni salto si sposta su uno degli altri tre stati con probabilità uniforme e, arrivato nello stato n -esimo (con $0 \leq n \leq 3$) accumula n grammi di tempomateria nel suo corpo!»

Nash-ata: «Se i miei calcoli sono corretti, considerando che è partito senza alcun quantitativo di tempomateria in corpo, mediamente al ritorno nello stato quantico di partenza stato-0 peserà...»

Instantaneamente Arctan-man riesce a tornare dal regno quantico, tutto intero, interrompendo Nash-ata.

Convex Hulk: «Io questa la considero una vittoria assoluta!»

Quale peso di tempomateria (in grammi) stava per dire Nash-ata prima di essere interrotta?

14. Ricerca di gemme disperse [★]

Avendo finalmente capito come viaggiare nel tempo, gli Avengers rimasti si interrogano su come recuperare tutte le gemme. Per massimizzare l'efficienza della missione, devono riuscire a trovare dei luoghi dello spazio e del tempo in cui sono riunite più gemme possibili. Per fare una ricerca sulla posizione delle gemme hanno a disposizione 2022 droni spaziotemporali numerati da 1 a 2022. Ogni drone potrà recarsi in un anno non negativo e strettamente minore di 2022, che chiameremo a_i (dove i è l'indice che identifica il drone). L'unico vincolo sul lancio dei droni è che deve esistere un polinomio a coefficienti interi $p(x)$, il cosiddetto polinomio lancia-droni-spaziotemporali, tale che, per ogni i , il numero $a_i - p(i)$ sia multiplo di 2022.

Bracket: «Quindi in quanti diversi modi possiamo lanciare i droni?»

Eigen Man: «Ovviamente intendi identificare un lancio come una 2022-upla ordinata, visto che i droni sono numerati, giusto?»

Bracket: «Sì, certo! E droni diversi possono anche recarsi nello stesso anno!»

Quale numero X risponde alla domanda di Bracket?

Dare come risultato la somma degli esponenti della fattorizzazione in primi di X .

15. Allineamento di specchi

Eigen Man e il Dr. Banner stanno finendo di progettare la macchina per il viaggio nello spazio tempo attraverso il regno quantico. La macchina è un triangolo ABC isoscele di base AB . Sul lato BC è posto il primo specchio iperriflettore nel punto A_1 (diverso da B) tale che $AA_1 = AB$; il secondo specchio è posto sul lato AC nel punto A_2 (diverso da A) tale che $A_1A_2 = AB$; il terzo è invece posto sempre sul lato BC nel punto A_3 (diverso da A_1) tale che $A_2A_3 = AB$; e così via. Per far sì che la macchina funzioni e possa spedire gli Avengers in diversi punti dello spaziotempo, si vuole che il 2022-esimo specchio coincida con il punto C . Per poter ultimare la costruzione della macchina è necessario conoscere il rapporto tra l'ampiezza dell'angolo al vertice e quella di uno degli angoli alla base. Quanto vale questo rapporto?

Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

16. Incantesimi più che razionali

Convex Hulk è appena giunto nel 2012 e si reca al Santuario per chiedere a Stringa di consegnargli la gemma del tempo. Appena arrivato, si rende però conto che il Dr. Stringa è ancora un chirurgo in quel passato, ed un altro stregone supremo difende la gemma: L'Antico.

L'Antico: «Bruce, se ti consegno la gemma per salvare la tua realtà, la mia perderà la sua più potente arma contro le forze del male! Ci resteranno solo gli incantesimi. Per ogni numero $a \in \mathbb{Q}$ noi possiamo scagliare un diverso incantesimo ed il suo indice di efficacia è calcolato come $\sqrt{3a+7} + \sqrt{12a+5}$. Ma in assenza della gemma del tempo nell'Occhio di Campigotto, gli unici incantesimi che possiamo scagliare sono quelli con indice di efficacia intero. Come puoi notare con un veloce calcolo, la somma degli indici di efficacia degli incantesimi scagliabili è molto bassa se io ti lascio portare via la gemma»

Quanto vale dunque la somma a cui l'Antico fa riferimento?

17. Scontri insoliti

Captain Numerica vuole recuperare lo scettro di $\text{Log}\chi$ nella Avengers Tower, quando si imbatte nel sé stesso del passato. I due Cap hanno gli stessi schemi di combattimento e sembra impossibile che uno riesca ad avere

la meglio sull'altro. Si muovono costantemente lungo un parallelogramma $ABCD$. Il Captain Numerica del futuro ha trovato una mossa imprevedibile, ma per poterla ultimare ha bisogno di calcolare l'ampiezza in gradi dell'angolo \widehat{DAC} . Finora ha soltanto capito che $\widehat{DBC} = \widehat{CAB} = 2\widehat{ABD}$.

Captain Numerica del passato: «Ho tutto il giorno libero!»

Captain Numerica del futuro: «Sì, lo so» e scaglia la mossa vincente.

Qual è l'ampiezza (in gradi) dell'angolo che il Cap del futuro cercava per vincere?

18. Viaggio in un passato più remoto

Eigen Man ha perso la possibilità di recuperare il Tesseract nel 2012 e si interroga, insieme a Captain Numerica e Ant-man, su come riuscire a portare a termine la missione. Per farlo deve trovare un anno in cui nello stesso luogo si trovavano sia le particelle πm (il carburante per il viaggio nel tempo) che il Tesseract.

Eigen Man: «Gli unici anni in cui possiamo recarci sono quelli tra l'1 e il 2022 (estremi inclusi) tali che si possano scrivere come differenza di due quadrati di interi *positivi*»

Cap: «Credo di sapere dove andare: una base del C.A.U.C.H.Y.L.D. nel New Jersey»

Eigen Man: «Perfetto, andremo lì!»

In quanti anni possono andare?

19. Salti nello spazio

Nash-ata e Occhio di Calcolo hanno appena lasciato NebUlam e War Machine su Morag, nel 2014. Devono ora andare su Vormir per recuperare la gemma dell'Anima. Occhio di Calcolo deve pilotare la Cesenatico (la navicella dei Geometri della Galassia) ma non ha idea di cosa fare. Per fortuna Bracket ha lasciato loro un video tutorial.

Bracket (nel video): «La Cesenatico ha due possibili propulsioni a curvatura spazio-temporale. Con la prima percorrerete 4,3 anni luce per ogni impulso e con la seconda 4,7. Per viaggiare dovrete sempre usare un numero intero di impulsi scegliendo liberamente ad ogni impulso quale propulsione usare. Potete quindi anche usare una propulsione più volte che l'altra. Vi faccio un esempio: voi che vi trovate a Morag e dovete andare a Vormir, che dista 202 anni luce, potete farlo esattamente! Dove con esattamente intendo che arriverete lì precisamente, senza dover tornare indietro. Buona fortuna!»

Nash-ata: «Chissà qual è il minimo numero intero N tale che tutti i tragitti di lunghezza intera (in anni luce) maggiore o uguale ad N possano essere percorsi con la Cesenatico?»

Occhio di Calcolo: «Queste domande non fanno per me...»

20. Morire di calcoli [★★]

Occhio di Calcolo e Nash-ata sono arrivati su Vormir per recuperare la gemma dell'Anima. Ad accoglierli al tempio c'è Red SkHull: «Qfello che cercate è dafanti a foi, come qfello che temete». Nash-ata: «La gemma è laggìù». Red SkHull: «Per uno di foi; l'altro infece dofrà morire di conti risolvendo qfesto problema:

Siano a, b, c reali e siano $u = a^2 + b^2 + c^2$ e $v = ab + bc + ca$. Sapete che $2022u = 2018v + 2025$. Quanto fale (vale, NdT) al massimo $37a - 22b - 13c$?»

Occhio di Calcolo: «Sappiamo tutti e due chi deve morire». Nash-ata: «A quanto pare...»

Ed entrambi tentano di lanciarsi nel dirupo. Qual è la soluzione del problema proposto da Red SkHull?

21. L'universo modulo 79 [★]

Wong chiama a raccolta gli stregoni dei tre santuari per andare a combattere la battaglia finale contro tanh(os). Wong: «Davanti a voi avete due stanze, e in ognuna di esse troverete 39 reliquie distinte e non ci sono reliquie uguali tra le due stanze. Entrate prima nella stanza di destra e prendetene alcune per attaccare il nemico. Entrate poi nella stanza di sinistra e prendetene alcune per difendervi. Il numero di quelle che prendete per difendervi deve essere inferiore a quelle che prendete per attaccare, eventualmente anche 0»

Mentre pronuncia queste parole, Wong si domanda quante combinazioni non ordinate di reliquie si possano ottenere seguendo le istruzioni appena dette. Allora Dr. Stringa, che lo legge nel pensiero, gli dà un consiglio:

Dr. Stringa: «Devi guardare l'universo modulo 79 se vuoi capirlo davvero!»

A quale numero stava pensando Wong? Si risponda indicando la congruenza modulo 79 del risultato.



XXIII Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – Soluzioni – Sabato 7
Maggio 2022



Nr.	Problema	Soluzione
1	Stuzzicadenti intrecciati	8025
2	Infiltrati Kree [★]	0043
3	Un cono tagliato	0300
4	Area relax	1011
5	Un riscaldamento contoso	2601
6	Il cuore triangolare di una stella morente [★★]	7924
7	Energia da dimensioni parallele [★]	4088
8	L'attacco degli outrider	2375
9	Gemma iperpoligonale	0052
10	Superscudi della tribù del confine [★★]	4186
11	Non solo fiori e conchiglie seguono Fibonacci	0003
12	Autovalori di particelle e stringhe spaziotemporali	0337
13	Ant-Man tra stati quantici spaziotemporali	0006
14	Ricerca di gemme disperse [★]	0342
15	Allineamento di specchi	2023
16	Incantesimi più che razionali	0022
17	Scontri insoliti	0105
18	Viaggio in un passato più remoto	1514
19	Salti nello spazio	0180
20	Morire di calcoli [★★]	0045
21	L'universo modulo 79 [★]	0001



GARA DI MATEMATICA A SQUADRE FEMMINILE
V FINALE NAZIONALE
(7 maggio 2022)

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare un numero intero compreso tra 0 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \quad \sqrt{3} = 1,7321 \quad \sqrt{5} = 2,2361 \quad \sqrt{7} = 2,6458 \quad \pi = 3,1416$$



THE POWERS OF THE GIRLS

*No more war please
No more destruction of innocent life
No more living in fear
No more on our bended knees.*

(Bronski Beat - No More War)

Questo testo è dedicato a **Yulia Zdanovska**. Aveva solo 21 anni ed era una delle menti più brillanti dell'Ucraina. Aveva una laurea in matematica e nel 2017 aveva vinto la medaglia d'argento alle EGMO.

1. AMORA, L'INCANTATRICE

(Carlo Cássola)

Amora è diventata così potente nelle arti magiche da essere soprannominata "l'incantatrice". È in grado di affascinare qualsiasi umano per ottenere le informazioni che le servono. Oggi ha incontrato un matematico e lo ha incantato con queste parole: "Come te la cavi con le funzioni? Prendi una funzione f , di cui sai soltanto che $f(n+1) = \frac{3f(n)+4}{3}$ e che $f(0) = 1$. Sapresti dirmi quanto vale $f(2022)$?" Il matematico ha risposto correttamente. Cosa ha detto?

2. DAZZLER

(Lorenzo Mazza)

Dazzler, il cui vero nome è Alison Blair, è capace di trasformare il suono in luce per creare raggi fotonici che possono stordire o abbagliare gli avversari. Epico fu il combattimento contro Galactus: realizzò attorno al suo avversario un grande quadrilatero convesso di luce $ABCD$ tale che $BC+CD=2022$ m, $AB=AD$, $\hat{B}AD=60^\circ$ e $\hat{B}CD=120^\circ$. Quanti metri misurava la lunghezza del raggio AC che sconfisse Galactus?

3. LA DONNA INVISIBILE

(Simone Bertone)

La Donna Invisibile, il cui vero nome è Susan Storm, è l'unico membro femminile dei Fantastici 4. Acquisì i suoi poteri in seguito all'esposizione ai raggi cosmici durante il lancio dell'astronave sperimentale di Reed Richards. È capace di rendersi invisibile e può creare campi di forze che riesce a sfruttare anche per alzarsi in volo. Intelligente al punto che, ancora giovane, stupì i suoi insegnanti risolvendo in pochi secondi il seguente quesito: quanti sono i numeri reali positivi x che sono uguali a 2022 volte la loro parte decimale? Quale fu la risposta?

4. WASP

(Simone Bertone)

Janet van Dyne, nota anche come Wasp, attualmente ha le dimensioni da insetto ed è in difficoltà, bloccata dalla colla. Ha chiamato in aiuto suo marito Ant-Man, che ha le dimensioni di una formica. I due si trovano su una specie di tubo di cartone, formato da un cubo di lato 10 dm, da cui sono state levate due facce opposte. Ant-Man si trova al centro di una faccia interna al tubo e camminando lungo le pareti (interne o esterne) cerca il percorso più breve possibile per arrivare al centro della faccia opposta ma esternamente al cubo dove si trova bloccata Wasp. Quanto è lungo in centimetri il cammino più breve che Ant-Man può fare per raggiungere sua moglie?

5. SPIDER GIRL

(Roberta Corisello)

Mayday Parker, figlia di Peter, scoprì i suoi poteri al liceo, durante una partita di basket, quando senza volere spiccò un salto di cinque metri. In realtà una prima avvisaglia si era già verificata durante una lezione di matematica. L'insegnante aveva chiesto alla classe di costruire un parallelepipedo di lati 3, 4 e 5 cm, di dividere le sei facce in quadretti di lato di 1 cm e di scrivere un numero intero positivo per ciascun quadretto di ciascuna faccia in modo che i quadretti di ogni faccia avessero tutti lo stesso numero, che i quadretti delle facce opposte avessero lo stesso numero e che lungo ogni striscia larga un quadretto che gira attorno al parallelepipedo e passa per la faccia più piccola, la somma dei numeri scritti fosse sempre 240. Mayday sapeva già la risposta prima ancora di cominciare a realizzare i possibili parallelepipedi. Dare come risposta la somma dei possibili numeri che si possono scrivere sulla faccia più piccola del parallelepipedo.

6. ILLYANA RASPUTIN

(Simona Pieri)

Illyana è stata istruita nelle arti della magia nera dopo essere stata rapita e condotta nel reame demoniaco *Limbo*. È capace di creare pozioni magiche la cui preparazione è estremamente delicata. Seguendo con attenzione le istruzioni, ha posato i primi quattro ingredienti della pozione nei vertici del trapezio $ABCD$ la cui base minore CD è $\frac{1}{7}$ della base maggiore AB . A questo punto altri due ingredienti della pozione vanno messi in M ed N , punti medi rispettivamente dei lati obliqui AD e CB . La pozione sarà efficace se Illyana riuscirà a determinare il rapporto tra l'area di $MNCD$ e quella di $ABNM$. Dai come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

7. GAMORA

(Simone Bertone)

Gamora, l'ultima componente della specie degli Zen Whoberi, ha diverse capacità straordinarie. Tra queste, è capace di calcolare in un attimo la somma $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2019 \cdot 2021}$. Quanto vale questa somma? Dai come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

8. VEDOVA NERA

(Roberta Corisello)

Considerata una delle donne più pericolose del Pianeta, Natasha Romanoff, detta anche Vedova Nera, è esperta di combattimento corpo a corpo. Natasha padroneggia le arti marziali ed è un'esperta sia nell'uso delle armi da fuoco che delle armi bianche. Sa calcolare molto velocemente e risolve problemi di conteggio in pochi secondi. Un giorno Bruce Banner le ha chiesto di contare quanti sono i numeri di cinque cifre \overline{abcde} , con tutte le cifre diverse e tali che $a > b > c$ e $c < d < e$. Lei ha dato la risposta in meno di un secondo. Che risposta ha dato?

9. PHOENIX

(Simone Bertone)

Phoenix è considerata una delle telepati più potenti della terra se non la più potente in assoluto. La sua capacità di leggere le menti non è mai venuta meno, nemmeno quando si è trovata ad una grande cena di politici newyorkesi. C'erano 2022 persone sedute ad una tavola rotonda. Alcune mentivano, altre dicevano la verità. Il primo di questi, una volta interrogato, ha affermato che "il collega seduto alla mia destra dice la verità". Il secondo, che è seduto alla destra del primo, dice: "la persona seduta nel posto diametralmente opposto al mio dice la verità". Il terzo, che è seduto alla destra del secondo, dice: "Il politico seduto alla mia sinistra mente". Successivamente il quarto ha detto la stessa cosa del primo, il quinto la stessa cosa del secondo, il sesto la stessa cosa del terzo e così via, fino al 2022-esimo. Phoenix, leggendo la mente di tutti contemporaneamente ha rivelato che sono presenti il massimo numero possibile di politici che mentono. Quanti erano?

10. RED SONJA

(Simone Bertone)

La grande guerriera Red Sonja dovrà affrontare in duello 10.000 guerrieri, uno alla volta secondo un ordine stabilito. I guerrieri sono numerati da 1 a 10.000 e Sonja li affronterà in ordine crescente a partire da quello che ha il numero 1. Prima che inizi il duello, però, alcuni guerrieri si ritirano. Abbandonano la sfida tutti e soli i guerrieri il cui numero contiene almeno una cifra 0 o almeno una cifra 2 (ovviamente si ritirano anche i guerrieri i cui numeri contengono entrambe le cifre). Qual è il numero del 2022-esimo guerriero che sfiderà Red Sonya?

11. SHE HULK

(Michelangelo Sabatini)

Jennifer Walters, abile avvocato di professione, ha prestato servizio come consulente legale di vari supereroi in numerose occasioni. È la cugina di Bruce Banner, alter ego di Hulk, dal quale ha ricevuto i superpoteri in seguito ad una trasfusione di sangue. Al contrario del cugino, però, ha completo controllo del suo potere. Jennifer è la donna più forte dell'universo, almeno dal punto di vista fisico. Data una lastra quadrata di metallo divisa in nove quadratini uguali colorati o di bianco o di nero, diciamo che la lastra è connessa se tutti i quadratini bianchi sono collegati tra loro per almeno un lato e così pure quelli neri. Jennifer è in grado di spezzare la lastra in modo da separare i due colori con un solo gesto. Quante lastre è possibile avere con i quadratini bianchi e neri connessi? (N.B una lastra tutta dello stesso colore è considerata connessa).

12. TEMPESTA

(Roberta Corisello)

Ororo Munroe, nota anche come Tempesta, è in grado di controllare il clima e gli agenti atmosferici. Sfrutta i venti caldi per sollevarsi da terra e grazie a questi è in grado di volare a grande velocità. Durante gli scontri contro gli avversari può richiamare i fulmini per scagliarli contro i suoi nemici. Le basta determinare un numero positivo b , dato dalla sua posizione geografica, da inserire nell'equazione $x^2 - ax + b = 0$ e calcolare la somma dei valori diversi che può assumere a affinché l'equazione abbia soluzioni intere positive. Che valore calcolerebbe Tempesta se $b = 576$?

13. POLARIS

(Claudia Manotti)

Polaris, il cui vero nome è Lorna Dane, è una mutante capace di controllare il magnetismo quasi come lo storico avversario degli X-Men, Magneto. Da tempo, oramai, ha lasciato la lotta contro il male per dedicarsi agli studi universitari, ma non ha dimenticato i suoi poteri. Oggi, ad esempio, passando vicino ad un parco giochi per bambini, ha sagomato una lunga sbarra d'acciaio per formare gli spigoli, lunghi 3 metri, di un grande icosaedro regolare. Per non spezzare la sbarra, a volte, ha dovuto ripassare su alcuni spigoli. Quanto era lunga la sbarra, come minimo?

14. EMMA FROST

(Sandro Campigotto)

Emma Grace Frost è una mutante, una telepate molto potente, nonché donna d'affari ricca ed influente; ha inoltre sviluppato una mutazione secondaria che le permette di trasformare il suo intero corpo in diamante organico, che le dona una resistenza e una forza sovrumane. Per un periodo ha insegnato all'interno dello Xavier Institute. Uno dei suoi test preferiti era il seguente: calcola

$$\sum_{k=7}^{100} \frac{121_k}{\sqrt[4]{14641_k}}$$
 dove a_k indica che il numero a è scritto in base k . Qual era la risposta?

15. MYSTICA

(Lorenzo Mazza)

Mystica è una mutaforma mutante che può alterare col solo pensiero la formazione delle sue cellule biologiche per cambiare il suo aspetto. Ha il potere di spostare gli atomi del proprio corpo per trasformarlo completamente assumendo la forma di altri umani e di animali. Il suo controllo è così preciso che può replicare con precisione la retina dell'occhio, il palmo della mano e le corde vocali della persona di cui assume le sembianze. Per fare questo le basta trovare degli interi positivi a_1, a_2, \dots, a_n , $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ tali

che la somma $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1}$ sia anch'esso un intero. Per quanti interi n , con $2 \leq n \leq 10.000$, è possibile farlo?

16. VALCHIRIA

(Simone Bertone)

Brunilde è la più forte di tutte le Valchirie. Sebbene non sia immortale invecchia molto più lentamente degli esseri umani, può percepire l'avvicinarsi della morte di una persona e condurla da e verso il regno dei morti ed è un'ottima combattente con la spada e a mani nude. Da giovane, Brunilde si iscrisse ad una accademia d'armi dove si distinse subito per le sue innate capacità. Un giorno dovette fronteggiare quattro avversari. In una semicirconferenza di diametro AB , lei si trovava in un punto C del diametro ed era circondata da quattro uomini situati nei punti A , B , D , ed E (in questo ordine sulla semicirconferenza). Brunilde valutò immediatamente che CE era perpendicolare a CD , l'angolo $\hat{E}DC$ era di 32° e l'angolo $\hat{C}BD$ era di 61° . Calcolò l'angolo $\hat{C}DB$ e grazie a questo calcolo riuscì ad attaccare e sconfiggere tutti e quattro gli avversari. Quanto misurava l'angolo $\hat{C}DB$?

17. CRYSTAL

(Michelangelo Sabatini)

Crystal, come tutti gli inumani, possiede numerose abilità fisiche sovrumane, tra le quali una grande forza e una grande resistenza. Ha la capacità di manipolare i quattro elementi naturali, ma anche di giocare con i numeri naturali. Per fare questo prende un qualunque numero naturale n e ne calcola tutti i divisori d (1 ed n compresi). Per ciascuno calcola la sua lunghezza $L(d)$, cioè il numero di prodotti necessari per andare da 1 a d moltiplicando solo per numeri primi (ad esempio $L(12) = 3$ e $L(1) = 0$). Quanto vale la somma dei quadrati di tutte le lunghezze dei divisori di $n = 10800$?

18. CAPITAN MARVEL

(Roberta Corisello)

Capitan Marvel sta volando per cercare di raggiungere Yon-Rogg e catturarlo. Le loro velocità sono tali che $2v_{CM} = 5v_{YR}$. Rappresentando la loro posizione in un sistema di assi cartesiani bidimensionale (i loro moti giacciono sullo stesso piano), partono nello stesso istante rispettivamente dai punti $(a; b)$, con $a > 0$, e $(0; 0)$ (le coordinate sono espresse in chilometri). Yon-Rogg si muove lungo l'asse x con velocità 2 km/h mentre Capitan Marvel si muove in modo che la somma delle distanze dalle rette $x = 2$ e $y = 2$ sia costante. È l'unico modo per non venire rilevata. Capitan Marvel ha già calcolato che raggiungerà l'avversario esattamente nel punto $(4; 0)$. Quali sono le coordinate del punto da cui è partita? Dare come risposta il valore di a trovato espresso in metri.

19. SCARLET

(Simona Pieri)

Ancora oggi Scarlet, al secolo Wanda Maximoff, ricorda il giorno in cui lo stesso Tony Stark le ha chiesto di unirsi agli Avengers per mettere al servizio dell'umanità il suo potere di distorcere la realtà spazio-temporale e di alterare le probabilità. Tony le chiese qual è la probabilità che, disponendo in linea, a caso, 7 giocatori di una squadra che indossano magliette con numeri tutti diversi, accada che 5 consecutivi di essi (da sinistra verso destra) non abbiano le maglie con i numeri in ordine crescente. Dai come risultato la somma del numeratore e del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

20. KITTY PRYDE

(Roberta Corisello)

L'abilità mutante di Kitty (il cui vero nome è Katherine Anne) consiste nell'attraversare qualsiasi oggetto solido si trovi sul suo cammino, riuscendo a "slegare" i propri atomi per passare tra gli spazi atomici di qualsiasi oggetto o materiale. Può anche estendere questo status d'intangibilità a una dozzina di persone o di oggetti (aventi la stessa massa) attorno a lei, purché mantengano un contatto fisico e lei risolva un'opportuna equazione. La volta che ha fatto attraversare la grande muraglia a ben 10 uomini ha dovuto calcolare $p(10)$, dove $p(x)$ è un polinomio a coefficienti interi tale che, per ogni x reale, sia $(x-81)p(3x) = 81(x-1)p(x)$ e $p(26) = 21505$. Che valore ha trovato?

21. ELEKTRA

(Sandro Campigotto)

Elektra è di origini greche. Quando aveva nove anni un gruppo di criminali l'ha rapita per chiedere un riscatto al padre. Salvata dal fratello maggiore, da allora è stata seguita da un sensei giapponese rivelandosi un prodigio delle arti marziali. Il segreto, le ha insegnato il maestro giapponese, è la concentrazione su problemi di matematica. Nell'ultimo scontro ha sgominato da sola una banda di 50 banditi armati calcolando a mente quante sono le terne di naturali positivi (x, y, z) con $x < y < z$, tali che $xyz = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2$. Che valore ha trovato?

Carlo Càssola

Liceo Scientifico "N. Copernico" di Udine

Claudia Manotti

IIS "B. Russell" di Guastalla

Con la partecipazione di:

Lorenzo Mazza

"Sapienza" Università di Roma

Michelangelo Sabatini

Liceo Classico "Tacito" di Terni

Roberta Corisello

ISIS "Magrini-Marchetti" di Gemona del Friuli

Simona Pieri

Convitto Nazionale "Principe di Napoli" di Assisi

Simone Bertone

ISIS "Copernico-Luxemburg" di Torino

Un ringraziamento speciale a:

Santina De Monte

ISIS "Magrini-Marchetti" di Gemona del Friuli

Ugo Tomat

Laureato in Matematica

Regia di:

Sandro Campigotto

UMI Commissione Olimpiadi

ISIS "Magrini-Marchetti" di Gemona del Friuli

Semifinale A - Classifica squadre

Golgi, Breno 967

Cassini, Genova 934

Galliei, Civitavecchia 769

Rosmini, Rovereto 741

Taramelli-Foscolo, Pavia 693

De Giorgi, Lecce 557

Peano, Monterotondo 554

521 Marinelli, Udine

479 Agnesi, Merate

465 Righi, Roma

431 Lioy, Vicenza

430 Newton, Chivasso

363 Da Vinci, Jesi

345 Stampacchia, Tricase

341 Frisi, Monza

319 Levi-Civita, Roma

294 Alighieri, Gorizia

278 Malignani, Udine

272 Marconi, Parma

270 Volta, Milano

251 Pacinotti, Cagliari

220 Da Vinci, Reggio Calabria

184 Magrini-Marchetti, Gemona Del Friuli

140 Lussana, Bergamo

16 Pontorno, Empoli

Semifinale B - Classifica squadre

Dini, Pisa 1159

Marconi, Carrara 869

Fermi, Cantu' 771

Nievo, Padova 677

Galilei, Trento 636

600 Amedeo di Savoia, Pistoia

475 Ribezzo, Francavilla

473 Tron-Zanella, Schio

431 Roiti, Ferrara

374 Russell, Cles

373 Pascal, Reggio Emilia

372 Grigoletti, Pordenone

369 Battaglioni, Taranto

364 Cairoli, Vigevano

342 Galilei, Crema

338 Galilei, Perugia

309 Fanti, Carpi

304 Galilei, Pescara

298 Mercalli, Napoli

261 Paleocapa, Rovigo

234 Da Ponte, Bassano del Grappa

233 Ariosto-Spallanzani, Reggio Emilia

177 Banzi Bazoli, Lecce

126 Volta, Colle Val d'Elsa

41 Nomentano, Roma

Semifinale C - Classifica squadre

Ferraris, Torino 1498

Calini, Brescia 963

Mascheroni, Bergamo 860

630 Leonardo, Brescia

629 Galilei, Catania

547 Volta, Foggia

512 Corni, Modena

505 Lorenzini, Pesca

500 Da Vinci, Terracina

421 Copernico, Prato

401 Aristotele, Roma

387 Virgilio, Roma

375 Marzoli, Palazzolo sull'Oglio

325 Dal Piaz, Feltre

303 Carducci-Volta-Pacinotti, Piombino

249 Alessi, Perugia

244 Peano-Pellico, Cuneo

209 Fermi, Massa

208 Redi, Arezzo

197 Copernico-Luxemburg, Torino

171 Saffo, Roseto degli Abruzzi

157 Majorana, Desio

145 Grassi, Latina

140 Romita, Campobasso

102 Castelnuovo, Firenze

Semifinale D - Classifica squadre

Da Vinci, Treviso 1034

Quadri, Vicenza 867

Copernico, Brescia 844

Ferri, Padova 695

Grassi, Saronno 681

Cattaneo, Torino 655

Don Milani, Montichiari 647

Rummo, Benevento 621

Principe di Napoli, Assisi 597

Copernico, Udine 584

534 Scarpa, Motta di Livenza

508 Bassa Friulana, Cervignano

455 Messedaglia, Verona

416 Tassoni, Modena

380 Respighi, Piacenza

362 Marconi, Conegliano

325 Pellati, Nizza Monferrato

308 Gobetti, Torino

299 Verga, Adrano

288 Patini, Castel Di Sangro

273 Vittorini, Milano

258 Leonardo da Vinci, Firenze

248 Gioia, Piacenza

166 Ramadur', Cisterna di Latina

150 De Sanctis - Galliei, Manduria

100 Alberti, Cagliari

Finale Nazionale - Classifica squadre

Ferraris, Torino 1305

Dini, Pisa 1232

Fermi, Padova 886

Galilei, Civitavecchia 780

Cassini, Genova 734

Quadri, Vicenza 694

Marconi, Carrara 693

634 Fermi, Cantu'

608 Cattaneo, Torino

568 Calini, Brescia

519 Da Vinci, Treviso

500 Amedeo di Savoia, Pistoia

488 Grassi, Saronno

451 De Giorgi, Lecce

445 Rosmini, Rovereto

434 Galilei, Catania

418 Mascheroni, Bergamo

411 Taramelli-Foscolo, Pavia

390 Galilei, Trento

324 Golgi, Breno

259 Nievo, Padova

245 Copernico, Brescia

226 Leonardo, Brescia

204 Volta, Foggia

Finale Femminile - Classifica squadre

Leonardo, Brescia 1194

Magrini-Marchetti, Gemona Del Friuli 1129

Dini, Pisa 991

Tron-Zanella, Schio 922

Marconi, Carrara 808

Quadri, Vicenza 699

Cassini, Genova 697

Marconi, Conegliano 683

Righi, Roma 651

635 De Giorgi, Lecce

613 Grigoletti, Pordenone

613 Volta, Foggia

533 Liroy, Vicenza

528 Redi, Arezzo

517 Copernico, Prato

511 Alberghetti, Imola

504 Scarpa, Motta di Livenza

487 Copernico, Udine

455 Volta, Milano

337 Principe di Napoli, Assisi

330 Di Savoia-Benincasa, Ancona

290 Grassi, Latina

283 Fanti, Carpi

262 Galilei, Verona

228 Capirola, Leno